

$$\begin{cases} o[\dot{x}] = o[Ax + Bu], \\ o[y] = o[Cx]. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} px(p) = Ax(p) + Bu(p), \\ y(p) = Cx(p). \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (pI - A)x(p) = Bu(p) \rightarrow x(p) = (pI - A)^{-1} Bu(p)$$

или

$$y(p) = C(pI - A)^{-1} Bu(p),$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = C(pI - A)^{-1} B.$$

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 2u, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]$$

$$y = Cx_1.$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = C(pI - A)^{-1} B;$$

$$pI - A = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -1 \\ -1 & p-1 \end{bmatrix}; \quad \det(pI - A) = p^2 - p - 1.$$

$$(pI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(pI - A)} \begin{bmatrix} p-1 & 1 \\ 1 & p \end{bmatrix}; \quad \text{где } i, j \text{ элемент получен из выражения}$$

$$\left[(-1)^{i+j} M_{ij} \right], \quad M_{ij} - \text{минор } i, j \text{ элементов.}$$

$$W(p) = [1 \quad 0] \cdot \frac{1}{\det(pI - A)} \begin{bmatrix} p-1 & 1 \\ 1 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{p^2 - p - 1} \cdot [p-1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{p^2 - p - 1};$$

$\det(pI - A) = \varphi(p)$ – характеристический полином системы;

$\det(pI - A) = \varphi(p) = 0$ – характеристическое уравнение системы.

Передаточная функция скалярных систем

Имеем дифференциальное уравнение, описывающее поведение скалярной системы

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u. \quad (1)$$

Используя свойства преобразования Лапласа перепишем (1) в изображениях

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) x(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0) u(p). \quad (2)$$

По определению, тогда передаточная функция

$$W(p) = \frac{x(p)}{u(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (3)$$

где $A(p)$, $B(p)$ – соответственно полиномы знаменателя и числителя передаточной функции.

В ТАУ $W(p)$ принято записывать в нормированном виде, когда свободные члены в полиномах $A(p)$ и $B(p)$ равны 1.

$$W_n(p) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\frac{b_m}{b_0} p^m + \frac{b_{m-1}}{b_0} p^{m-1} + \dots + 1}{\frac{a_n}{a_0} p^n + \frac{a_{n-1}}{a_0} p^{n-1} + \dots + 1}, \quad (4)$$

где $\frac{b_0}{a_0} = k$ – коэффициент передачи (усиления) элемента или системы.

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 2u. \end{cases} \Rightarrow \dot{x}_2 = x_1 + \dot{x}_2 + 2u \Rightarrow \dot{x}_2 - \dot{x}_2 = x_1 + 2u \Rightarrow x_1 = -2u.$$

По свойствам преобразования Лапласа найдем

$$(p^2 - p - 1)x(p) = 2u(p).$$

$$\text{Итак, } W(p) = \frac{x(p)}{u(p)} = \frac{2}{p^2 - p - 1}.$$

Имея передаточную функцию на структурных схемах, связь между входом $u(p)$ и выходом $y(p)$ можно показать в виде (рис.18).

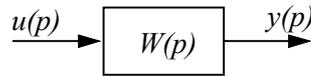


рис. 18

Частотные характеристики САУ

При исследовании и создании САУ, аппарат частотных характеристик был одним из первых, т.к. они наиболее полно отражают физическую природу процессов, происходящих в динамических объектах.

В качестве преобразования функции $f(t)$ используется преобразование Фурье

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (1)$$

Преобразование Фурье позволяет разложить непериодическую функцию $f(t)$ для которой выполняется условие сходимости

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (\text{интеграл существует}) \quad (2)$$

в бесконечный ряд гармоник, образующих непрерывный спектр частот в интервале от $-\infty$ до $+\infty$ с бесконечно малым интервалом частот между смежными частотами ($\Delta\omega \rightarrow 0$).

Отметим, что по сравнению с преобразованием Лапласа преобразование Фурье позволяет отобразить оригинал только на мнимую ось, в преобразовании Лапласа же используется вся комплексная плоскость.

Для перехода к частотным характеристикам, необходимо в уравнение ПФ (3) (стр.17) вместо оператора Лапласа p подставить оператор Фурье $j\omega$ ($p \rightarrow j\omega$), получим частотную характеристику

$$W(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + b_{m-2}(j\omega)^{m-2} + \dots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + a_{n-2}(j\omega)^{n-2} + \dots + a_0}. \quad (3)$$

Рассмотрим понятие о частотных характеристиках.

Если на вход линейной разомкнутой системы (или звена) подать гармонический входной сигнал, то по истечении некоторого времени окончания переходных процессов на выходе системы (звена) установится также гармонический выходной сигнал той же частоты. Амплитуда и фаза при прочих равных условиях будут зависеть от частоты входного сигнала. По ним, как будет показано дальше, можно судить о свойствах САУ.

Достоинством частотных методов является то, что частотные характеристики можно снять экспериментально. Чтобы снять частотную характеристику необходимо на вход подавать гармонический сигнал, изменяя частоту от 0 до ∞ , а на выходе измерять амплитуду и фазу для частот ω .

Отметим еще, что в выражении передаточной функции и частотной характеристики для реальных систем степень знаменателя всегда больше степени числителя $n > m$, т.к. полоса пропускания частот реальной системы всегда ограничена. Действительно, если $n < m$, то на выходе системы при увеличении частоты могут возникнуть колебания с бесконечно большой амплитудой.

Частотная характеристика (ЧХ) элемента или системы $W(j\omega)$ может быть представлена в двух видах:

1. $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$
2. $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$

где $P(\omega)$ – вещественно-частотная характеристика (ВЧХ);

$Q(\omega)$ – мнимо-частотная характеристика (МЧХ);

$A(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ);

$\varphi(\omega)$ – фазо-частотная характеристика (ФЧХ).

Часто ЧХ представляется графически (рис.19) на комплексной плоскости, где все указанные величины связаны между собой по следующим соотношениям.

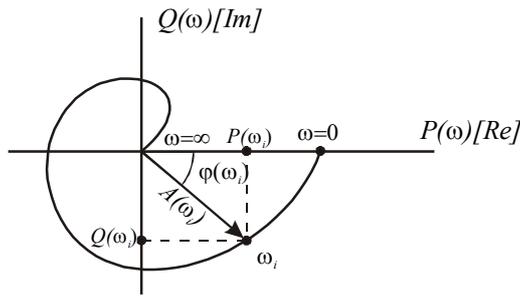


Рис.19

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \quad - \text{АЧХ.}$$

$$\varphi(\omega) = \arg[W(j\omega)] = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad - \text{ФЧХ.}$$

Часто при исследовании систем используются логарифмические частотные характеристики.

Понятие о логарифмических частотных характеристиках

При исследовании САУ, амплитудную и фазовую частотные характеристики удобно строить в логарифмических координатах. Это связано с двумя обстоятельствами:

1. в логарифмических масштабах кривизна характеристик резко уменьшается, что позволяет в большинстве практических случаев приблизительно изображать АЧХ ломанными линиями.
2. в логарифмических масштабах АЧХ цепочки звеньев равна сумме АЧХ отдельных звеньев

$$\lg A = \sum_{i=1}^n \lg A_i .$$

АЧХ в логарифмических масштабах строится в координатах $20\lg A$ и $\lg \omega$, а ФЧХ – в виде зависимости φ от $\lg \omega$.

Единицей измерения $20\lg A$ служит децибел, равная 0,1 бела. Бел – единица измерения десятичного логарифма коэффициента усиления мощности сигнала, т.е. 1 бел соответствует усилению мощности в 10 раз, 2 бела – в 100 раз и т.д. Так как мощность сигнала пропорциональна квадрату амплитуды A^2 (Пример: для электрической цепи $P = I^2 R$; $P \equiv I^2$), $\lg A^2 = 2 \cdot \lg A$, то усиление в белах, выраженное через отношение амплитуд A , равно $2 \cdot \lg A$, соответственно в децибелах оно равно $2 \cdot 10 \cdot \lg A = 20 \cdot \lg A$.

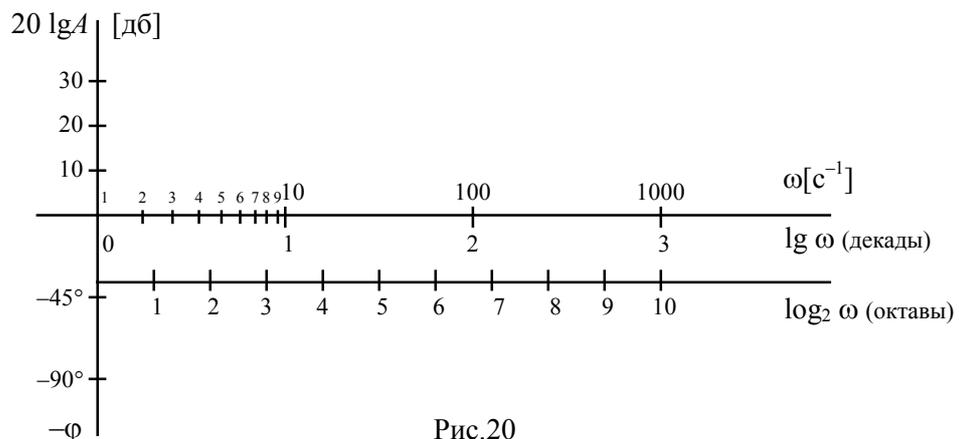


Рис.20

По оси абсцисс откладывается в логарифмическом масштабе частота $\lg \omega$ (десятичный логарифм) (изменение частоты в 10 раз – декада), а около отметок указывается само значение частоты. Иногда применяется логарифм частоты при основании 2 (изменение частоты в два раза – октава) одна октава равно 0,303 декады, т.к. $\lg 2 = 0,303$.

Для построения логарифмических фазовых характеристик (ЛФХ) на оси абсцисс используется аналогичная шкала частот $\lg \omega$ или $\log_2 \omega$, а по оси ординат (обычно используется нижняя часть плоскости) откладывается фаза φ в градусах.

Отметим ещё, т.к. точка $\omega = 0$ в логарифмическом масштабе находится слева (в $-\infty$), то ЛАФХ строятся не от $\omega = 0$, а от достаточно малого, но конечного значения ω , которое и откладывается в начале координат.

Структурные методы ТАУ

Математическое описание САУ начинается с разбиения её на типовые по математическому описанию звенья. По уравнениям или характеристикам отдельных звеньев составляются уравнения или характеристики системы в целом. Разбиение на типовые звенья по математическому описанию позволяет перейти от необозримого множества физических элементов к конечному числу звеньев.

Структурная схема САУ составляется из типовых звеньев направленного действия. Звеном направленного действия называется звено, которое передает воздействие только в одном направлении со входа на выход (рис.21).

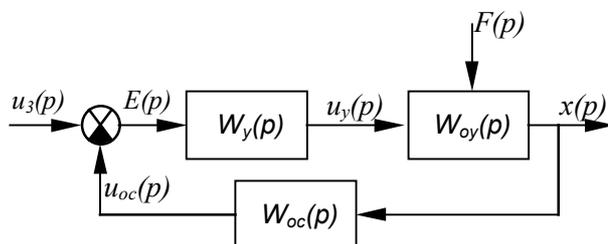


рис. 21

Получение структурной схемы в большинстве случаев является конечной целью математического описания системы.

Типовые звенья САУ

К типовым по математическому описанию звеньям САУ относятся:

1. Усилительное;
2. Интегрирующее;
3. Апериодическое;
4. Колебательное или звено второго порядка;
5. Идеальное дифференцирующее;
6. Реальное дифференцирующее.

Вначале рассмотрим стандартные сигналы, действующие при расчетах систем:

1. Единичный ступенчатый сигнал (рис.22).

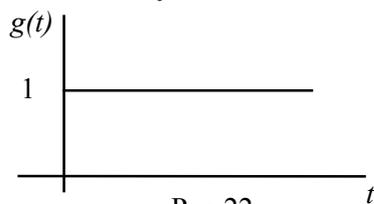


Рис.22

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ 1, & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

Основной сигнал при котором исследуются САУ.

Это наиболее тяжелый в смысле влияния на систему сигнал. Реально на систему чаще действуют сигналы постепенно возрастающие во времени. Следовательно, при удовлетворительной работе системы при единичном сигнале, она будет работать лучше при сигнале, отличном от единичного.

2. Единичный импульсный сигнал (рис.23), получается дифференцированием единичной ступенчатой функции, называемой $\delta(t)$ – дельта функцией.

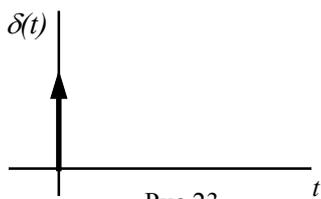


Рис.23

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq 0, \\ \infty, & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Единичный импульс – это математическая идеализация предельно короткого импульсного сигнала. Единичный импульс – это импульс, площадь которого равна единице при длительности равной нулю и высоте, равной бесконечности.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

3. Гармонический сигнал.

Определения:

1. Реакция звена или системы на единичный ступенчатый сигнал, называется переходной функцией (характеристикой).
2. Реакция звена или системы на δ -функцию называется импульсно-переходной функцией.
3. Реакция звена или системы на гармонический сигнал при изменении частоты от 0 до ∞ ($0 \leq \omega \leq \infty$), называется частотной характеристикой.

При рассмотрении всех типовых звеньев нас будут интересовать такие характеристики:

1. Определение и математическое описание звена.
2. Передаточная функция.
3. Реакция звена на стандартные сигналы:
 - 3.1. Переходная функция.
 - 3.2. Импульсно-переходная функция.
 - 3.3. Частотная характеристика.
 - 3.3.1. в обычном масштабе.
 - 3.3.2. в логарифмическом масштабе.
4. Примеры.

1. Усилительное звено

1. Безынерционное звено, сигнал на выходе которого строго пропорционален сигналу на входе, называется усилительным звеном (рис.24).

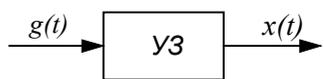


рис. 24

По определению $x(t) = k \cdot g(t)$,
 $g(t)$ – входное воздействие (один из стандартных сигналов),
 $x(t)$ – реакция на выходе,

k – коэффициент пропорциональности.

2. Переходя к преобразованию Лапласа $X(p) = kQ(p)$, тогда передаточная функция:

$$W(p) = \frac{X(p)}{Q(p)} = k,$$

k – коэффициент усиления (если величина безразмерная) и коэффициент передачи (если k размерно).

- 3.1. Если на вход усилительного звена подать единичную ступенчатую функцию $g(t)$, то переходная функция будет иметь вид, как показано на рис.25.

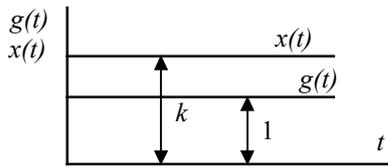


Рис.25

3.2. Для получения импульсной переходной функции необходимо продифференцировать по времени переходную характеристику, тогда на выходе имеем $\delta(t)$ -функцию.

3.3. Частотная характеристика ($p \rightarrow j\omega$).

$$3.3.1. W(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Q(j\omega)} = k, \quad P(\omega) = k, \quad A(\omega) = k, \\ Q(\omega) = 0, \quad \varphi(\omega) = 0^\circ$$

на комплексной плоскости имеет вид:

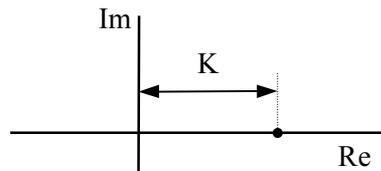


Рис.26

3.3.2. ЛЧХ: $20 \cdot \lg A(\omega) = 20 \cdot \lg k$.

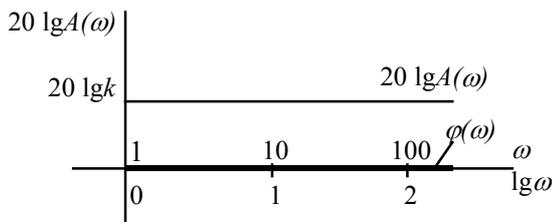


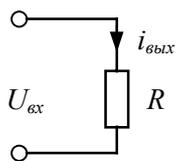
Рис.27

ЛФХ: $\varphi(\omega) = 0$.

Описание реальных элементов динамическими характеристиками усилительного безинерционного звена является всегда некоторой идеализацией, т.к. все реальные объекты в природе – инерционны.

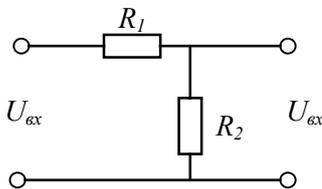
4.

1.



$$i_{\text{вых}} = \frac{1}{R} U_{\text{вх}} = k U_{\text{вх}}, \quad \text{где } k = \frac{1}{R} \text{ (1/ом) – коэффициент передачи.}$$

2.



$$U_{\text{вых}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{\text{вх}} = k U_{\text{вх}}, \quad \text{где } k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \text{– коэффициент усиления.}$$

2. Интегрирующее звено

1. Звено, сигнал на выходе которого пропорционален интегралу от входного сигнала, называется интегрирующим звеном.

По определению: $x(t) = \int_0^t g(t) dt$.



рис. 28

2. Из свойства преобразования Лапласа:

$$X(p) = k \frac{1}{p} Q(p) = \frac{k}{p} Q(p).$$

Тогда по определению передаточная функция будет

$$W(p) = \frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{k}{p}.$$

Отметим, что коэффициент передачи интегрирующего звена имеет размерность 1/сек.

3.1. Если $g(t)$ – единичная ступенчатая функция, то переходная функция интегрирующего звена имеет вид $x(t) = kt$ (рис.29).

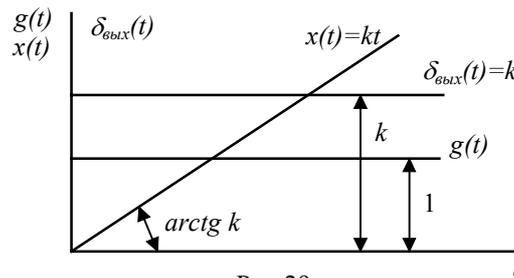


Рис.29

3.2. Если $g(t) = \delta(t)$, то дифференцируя $x(t)$, получим $\delta_{\text{вых}}(t) = k$ (рис.29).

3.3. Частотная характеристика.

$$3.3.1. W(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega},$$

$$P(\omega) = 0, \quad A(\omega) = \frac{k}{\omega},$$

$$Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

т.е. амплитудно-фазовая характеристика при изменении частоты от 0 до ∞ проходит по отрицательной мнимой оси комплексной плоскости (рис.30).

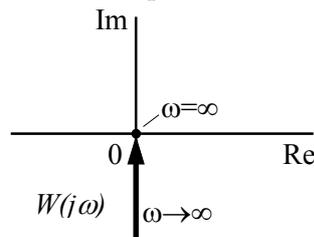


Рис.30

3.3.2. ЛАХ: $20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega$.

Вычислим значение ЛАХ при $\omega = 1$ и $\omega = 10$.

$$\omega = 1, \quad 20 \lg A(1) = 20 \lg k,$$

$$\omega = 10, \quad 20 \lg A(10) = 20 \lg k - 20.$$

Следовательно, при изменении частоты на 1 декаду, амплитуда уменьшается на 20 децибел (рис.31).

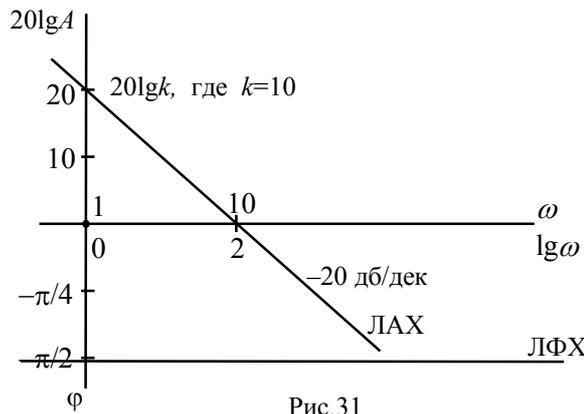
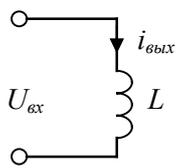


Рис.31

ЛФХ: $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

4.

1.

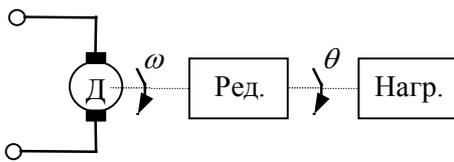


если $R=0$, то по закону Кирхгофа

$$U_{\text{вх}} = L \frac{di_{\text{вых}}}{dt}; \quad i_{\text{вых}} = \frac{1}{L} \int_0^T U_{\text{вх}} dt = k \int_0^T U_{\text{вх}} dt,$$

$$k = \frac{1}{L} \text{ (1/Гн)} - \text{коэффициент передачи.}$$

2.



ω – угловая скорость вращения вала двигателя.

θ – угол поворота выходного вала редуктора.

Для редуктора $g(t) = \omega$, $x(t) = \theta$.

Из механики известно, что $\omega = k \frac{d\theta}{dt}$, тогда

$$\theta = \frac{1}{k} \int_0^T \omega dt, \quad k - \text{коэффициент передачи редуктора.}$$

3. Аперриодическое (инерционнoе) звено или звено 1-го порядка

1. Звено, которое описывается уравнением вида:



рис. 32

$$T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = kg(t),$$

где k – коэффициент передачи (усиления),

T – постоянная времени, характеризующая

инерционность (с), называется аперриодическим звеном.

2. Переходя к преобразованию Лапласа

$$(Tp + 1)x(p) = kG(p) \tag{1}$$

получим по определению передаточную функцию

$$W(p) = \frac{x(p)}{G(p)} = \frac{k}{Tp + 1} \tag{2}$$

3.1 Переходная характеристика такого звена при $g(t) = 1$ представляет собой экспоненту

$$x(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

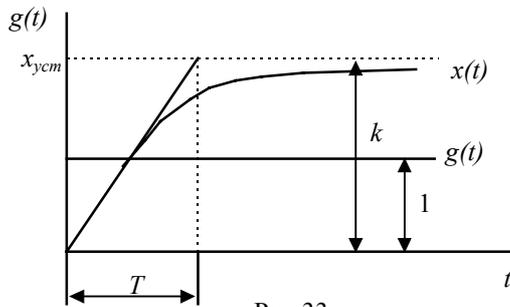


Рис.33

Переходный процесс достигает своего установившегося значения $0,95x_{ycm}$ практически за $3T$ (рис.33).

3.2 Импульсная переходная функция при $g(t) = \delta(t)$ находится дифференцированием $x(t)$ при $g(t) = 1$, получим

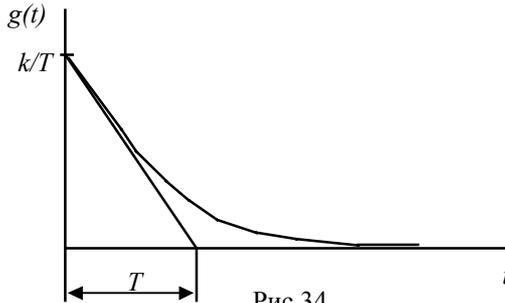


Рис.34

$$\delta_{вых}(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad (\text{рис.34.})$$

Если эти характеристики получены экспериментально, то по ним можно определить T и k , как показано на рис. 33 и 34, и, таким образом, получить уравнение звена (что очень важно).

3.3.1 Частотная характеристика:

$$W(j\omega) = \frac{x(j\omega)}{G(j\omega)} = \frac{k \cdot (1-jT\omega)}{Tj\omega + 1 \cdot (1-jT\omega)} = \frac{k - jkT\omega}{T^2\omega^2 + 1};$$

$$P(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}; \quad Q(\omega) = -\frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1};$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg T\omega;$$

График ЧХ в обычном масштабе (рис.35).

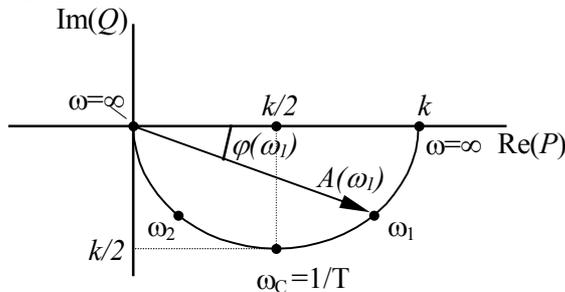


Рис.35

3.3.2. ЛАХ: $20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}};$

При $k = 1$ $20 \lg A(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2};$

Построение:

1. При малых частотах, где $T^2 \omega^2 \ll 1$, пренебрегаем $T^2 \omega^2 = 0$.
 $20 \lg A(\omega) = -20 \lg 1 = 0$.
2. При больших частотах, где $T^2 \omega^2 \gg 1$, пренебрегаем 1, тогда
 $20 \lg A(\omega) = -20 \lg T\omega$.
3. В области средних частот $T^2 \omega^2 = 1$, отсюда определяем частоту сопряжения низкочастотной и высокочастотной составляющей: $\omega_c = \frac{1}{T}$

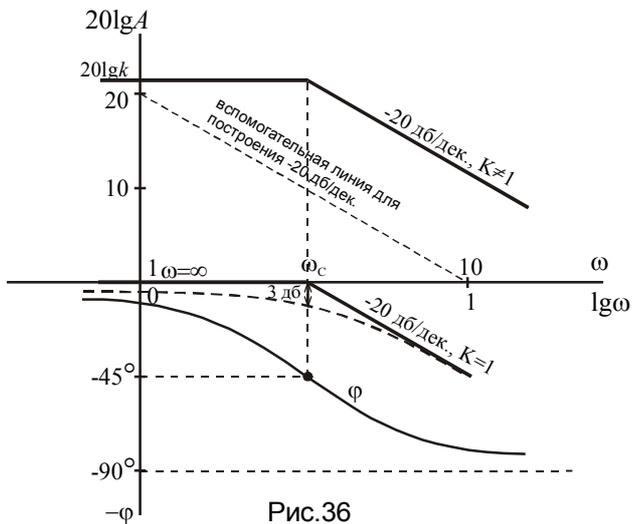


Рис.36

ЛФХ (рис.36): $\varphi(\omega) = -\arctg T\omega$ – тангенсоида,

Определим наклон высокочастотной составляющей, для чего вычислим изменение $\lg A$ при изменении частоты в 10 раз.

$$20 \lg \Delta A = -20 \lg 10T + 20 \lg T = -20 \lg \frac{10T}{T} = -20 \lg 10 = -20 \text{ дБ}$$

т.е. при изменении частоты на одну декаду (в 10 раз), ЛАХ уменьшается на 20 дБ, следовательно наклон высокочастотной составляющей равен -20 дБ/дек.

Это мы построили приближенную характеристику. Действительная АЧХ отличается в частоте сопряжения, как известно из практики на 3 дБ (что допустимо для инженерных расчетов) (рис.36).

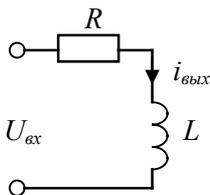
при $\omega = 0, \varphi = 0;$

при $\omega = \omega_c = \frac{1}{T}, \varphi = -45^\circ;$

при $\omega = \infty, \varphi = -90^\circ.$

При $k \neq 1$ ЛАХ перемещается параллельно самой себе по оси ординат на величину $20 \lg k$, ЛФХ – остается той же самой (рис.36).

4.



$$U_{\text{вх}} = i_{\text{вых}} R + L \frac{di_{\text{вых}}}{dt}$$

Поделив на R, получим

$$T \frac{di_{\text{вых}}}{dt} + i_{\text{вых}} = k U_{\text{вх}}, \quad \text{где } k = \frac{1}{R}, [1/\text{Ом}] \text{ – коэффициент передачи апериодического звена.}$$

$$T = \frac{L}{R}, [\text{сек.}] \text{ постоянная времени апериодического звена.}$$

4. Колебательное звено или звено 2-го порядка

1. Уравнение колебательного звена:



рис. 37

$$T_1^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = kg(t), \quad (1)$$

причем T_1 и T_2 связаны между собой условием

$$\xi = \frac{T_2}{2T_1} < 1 \quad (\xi \text{ – кси}) \quad (2)$$

Условие (2) означает, что корни характеристического уравнения $T_1^2 \lambda^2 + T_2 \lambda + 1 = 0$, соответствующего дифференциального уравнения (1) являются комплексными

$$\lambda_{1,2} = \frac{-T_2 \pm \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2T_1^2} \quad (3)$$

2. Переходя к преобразованию Лапласа

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)x(p) = kG(p) \quad (4)$$

получим передаточную функцию колебательного звена

$$W(p) = \frac{x(p)}{G(p)} = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}. \quad (5)$$

3.1. Переходная характеристика получается при решении уравнения (1), если $g(t) = 1$ и имеет вид, показанный на рис.38 для ряда значений $\xi = \frac{T_2}{2T_1}$. Из рисунка видно, что с ростом ξ колебательность переходного процесса уменьшается, исчезая совсем при $\xi \geq 1$.

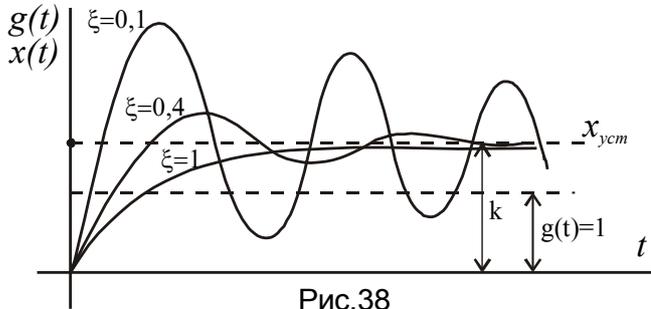


Рис.38

3.2. Дифференцируя переходную функцию получим импульсную переходную функцию, один из возможных видов импульсной переходной функции показан на рис.39.

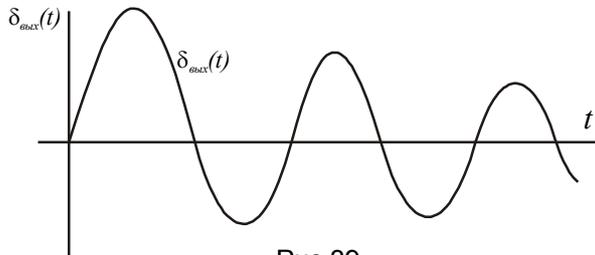


Рис.39

3.3. Частотная характеристика

3.3.1.

$$W(j\omega) = \frac{x(j\omega)}{G(j\omega)} = \frac{k}{(1 - T_1^2 \omega^2) + jT_2 \omega}. \quad (6)$$

Освобождаясь от мнимой части в знаменателе, получим:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = \frac{k(1 - T_1^2 \omega^2)}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2} - j \frac{kT_2 \omega}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}. \quad (7)$$

График ЧХ в обычном масштабе при различных ξ имеет вид (рис.40):

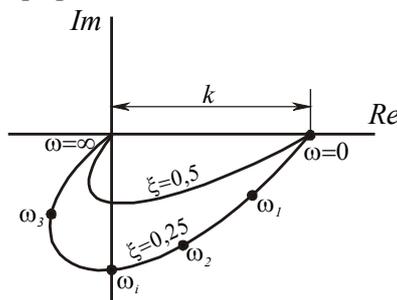


Рис.40

$$P(\omega) = \frac{k(1 - T_1^2 \omega^2)}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}, \quad (8)$$

$$Q(\omega) = -\frac{kT_2 \omega}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}, \quad (9)$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2},$$

ω_i – частота собственных колебаний

3.3.2. ЛАХ:

$$20 \lg A = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2} \quad (10)$$

при $k = 1$

$$20 \lg A = -20 \lg \sqrt{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2},$$

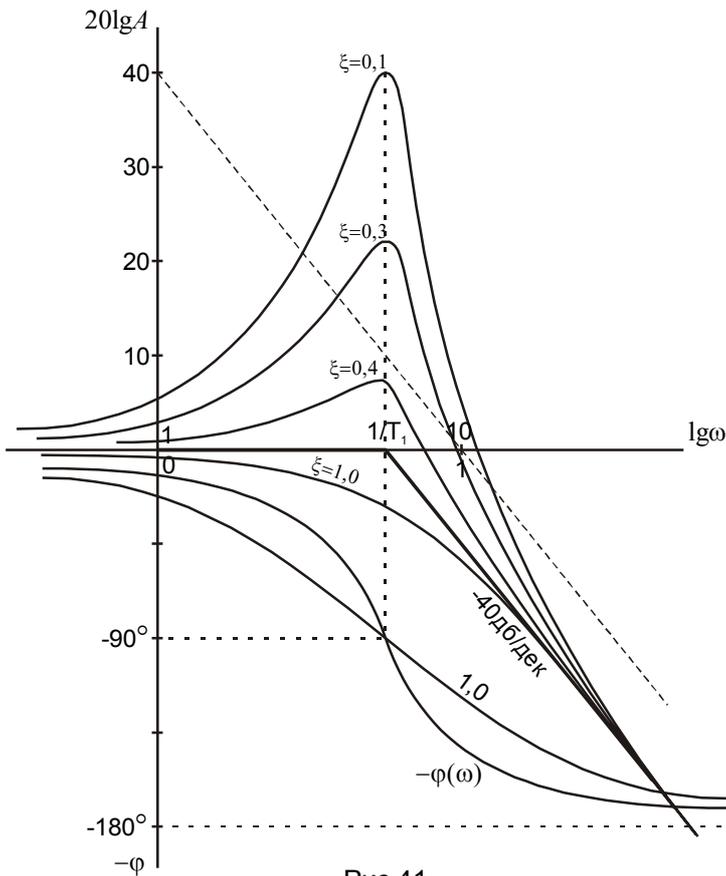


Рис.41

т.к. $\xi = \frac{T_2}{2T_1}$, то $T_2 = 2\xi T_1$ и

$$20 \lg A = -20 \lg \sqrt{1 + (4\xi^2 - 1)T_1^2 \omega^2};$$

1) При малых частотах $(4\xi^2 - 1)T_1^2 \omega^2 \ll 1$, тогда $20 \lg A = -20 \lg 1 = 0$.

2) При больших частотах $(4\xi^2 - 1)T_1^2 \omega^2 \gg 1$, тогда $20 \lg A = -20 \lg T_1 \omega \sqrt{4\xi^2 - 1}$.

3) В области средних частот $1 = (4\xi^2 - 1)T_1^2 \omega^2$ или $\omega_c = \frac{1}{T_1 \sqrt{4\xi^2 - 1}}$.

На рис.41 приведены ЛАХ колебательного звена. Она представляет собой ломанную линию, состоящую из двух асимптот, к которым стремится ЛАХ при $\omega \rightarrow 0$ и при $\omega \rightarrow \infty$. Одна асимптота – ось абсцисс при $k = 1$. В общем случае она идет вдоль оси абсцисс на расстоянии $20 \lg k$. Другая асимптота имеет наклон -40 дБ/дек. Точка пересечения асимптот соответствует частоте $\omega_c = \frac{1}{T_1}$.

Если $0,4 < \xi < 0,7$, то расхождение между асимптотической и истинными ЛАХ не превышает ± 3 дБ., поэтому для таких звеньев можно пользоваться асимптотическими ЛАХ.

При других значениях ξ асимптотическую ЛАХ корректируют с помощью графиков поправок, приведенных в литературе (рис.42).

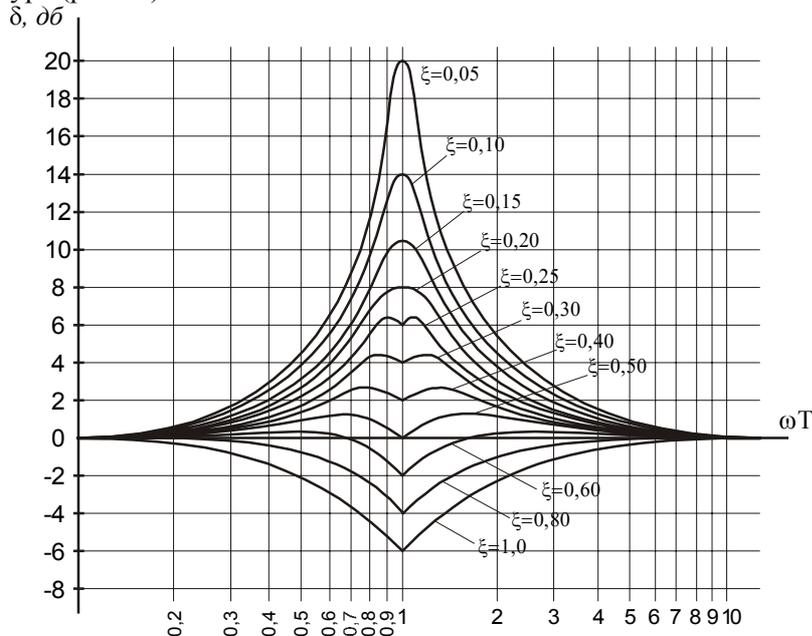
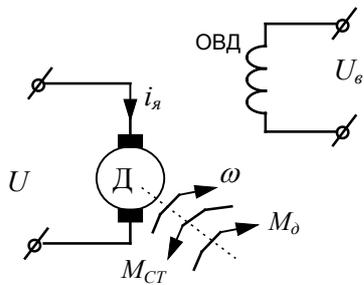


Рис.42

Фазовая характеристика имеет при $\omega \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow -\pi$.

4. Пример: Покажем, что двигатель постоянного тока является колебательным звеном.



$$U = E_{\delta} + i_{я} R_{я} + L_{я} \frac{di_{я}}{dt}, \quad (1)$$

$$E_{\delta} = k_e \omega, \quad (2)$$

$$M_{\delta} - M_{СТ} = J \frac{d\omega}{dt}, \quad (3)$$

$$M_{\delta} = k_m i_{я}, \quad (4)$$

где U – входное напряжение якоря двигателя (входной сигнал);
 ω – скорость вращения двигателя (выходной сигнал);
 k_e, k_m – постоянные коэффициенты;
 J – момент инерции якоря двигателя;
 $M_{\delta}, M_{СТ}$ – момент, развиваемый двигателем и момент сопротивления.

Положим $M_{СТ} = 0$. Решив совместно уравнения (1) ÷ (4) относительно U и ω , получим подставляя (4) в (3)

$$i_{я} = \frac{J}{k_m} \frac{d\omega}{dt}$$

и полученный результат в (1), получим

$$U = k_e \omega + \frac{J R_{я}}{k_m} \frac{d\omega}{dt} + \frac{J L_{я}}{k_m} \frac{d^2 \omega}{dt^2},$$

Разделим левую и правую часть на k_e

$$\frac{J L_{я} R_{я}}{k_e k_m} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{J R_{я}}{k_e k_m} \frac{d\omega}{dt} + \omega = k U,$$

где $k = \frac{1}{k_e}$ – коэффициент передачи двигателя (1/сек).

Обозначим $\frac{L_{я}}{R_{я}} = T_{я}$; $\frac{J R_{я}}{k_e k_m} = T_m$.

Имеем $T_{я} T_m \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = k U$.

5. Идеальное дифференцирующее звено

1. Звено, выходной сигнал которого пропорционален дифференциалу от входного сигнала называется дифференцирующим звеном:



рис. 43

$$x(t) = k \frac{dg(t)}{dt}, \quad (1)$$

k – коэффициент передачи дифференцирующего звена имеет размерность [сек].

Переходим к преобразованию по Лапласу

$$X(p) = kpG(p). \quad (2)$$

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{X(p)}{G(p)} = kp. \quad (3)$$

Уравнение (3) показывает, что порядок оператора p числителя выше порядка знаменателя. Это говорит о том (как уже ранее говорилось), что реально такого звена не существует.

Однако с теоретической точки зрения идеальное дифференцирующее звено представляет интерес.

3.3.1. Переходная функция идеального дифференцирующего звена при $g(t) = 1$, равна $x(t) = k\delta(t)$ (рис.44), где $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$ – единичная импульсная функция.

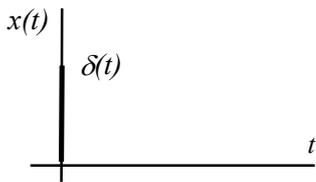


Рис.44

3.2. Импульсная переходная функция будет также δ -функцией (рис.44).

3.3. Частотная характеристика

$$3.3.1. W(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{G(j\omega)} = jk\omega \quad (4)$$

$$P(\omega) = 0; \quad Q(\omega) = k\omega;$$

$$A(\omega) = k\omega; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

Графически ЧХ в обычном масштабе имеет вид (рис.45)

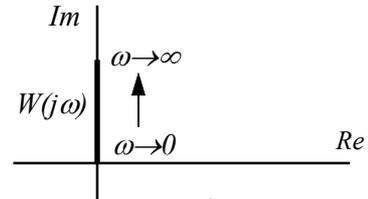


Рис.45

3.3.2. ЛАХ: $20\lg A(\omega) = 20\lg k + 20\lg \omega$
 при $k = 1$ $20\lg A(\omega) = 20\lg \omega$

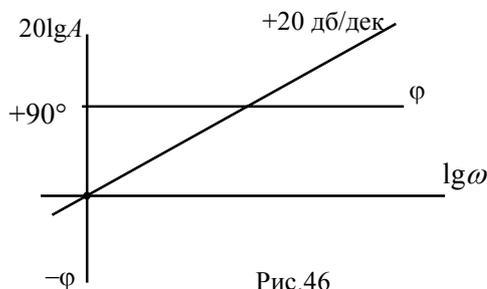


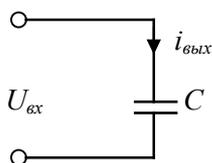
Рис.46

Наклон ЛАХ соответствует +20 дБ на декаду (почему?) (рис.46).

При $k \neq 1$ ЛАХ перемещается параллельно самой себе по оси ординат на величину $20\lg k$.

$$\text{ЛФХ: } \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

4. Пример:



при $R = 0$;

$$i_{\text{вых}} = C \frac{U_{\text{вх}}}{dt};$$

6. Реальное дифференцирующее звено

Как было указано выше, реализовать идеальное дифференцирующее звено практически невозможно. Оно реализуется только при наличии дополнительных помех, т.е. звеном, обладающим конечной инерционностью.

1. Такое звено описывается уравнением:

$$T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k \frac{dg(t)}{dt}, \quad (1)$$

рис. 47

2. Преобразование Лапласа:

$$(Tp + 1)X(p) = kpG(p). \quad (2)$$

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{X(p)}{G(p)} = \frac{kp}{Tp + 1}. \quad (3)$$

Реальное дифференцирующее звено (3) уже нельзя считать типовым, т.к. его можно заменить последовательным соединением идеального дифференцирующего звена $W_1(p) = kp$ и аperiodического

$$W_2(p) = \frac{1}{Tp + 1}.$$

- 3.1. проанализировать самостоятельно;
- 3.2. проанализировать самостоятельно;
- 3.3.1. проанализировать самостоятельно;

3.3.2. ЛАХ: $20 \lg A(\omega) = 20 \lg |kp| + 20 \lg \left| \frac{1}{Tp + 1} \right|.$

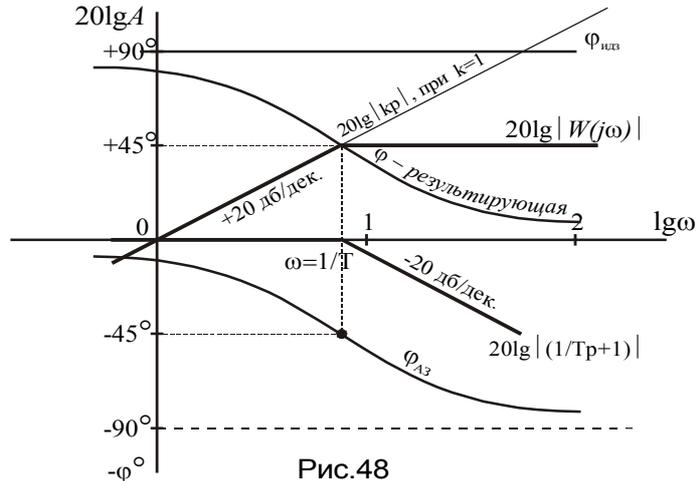
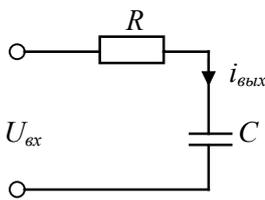


Рис.48

4. Пример:



$$U_{вх} = i_{вх} R + \frac{1}{C} \int_0^T i_{вх} dt,$$

$$CU_{вх} - CRi_{вх} = \int_0^T i_{вх} dt,$$

$$T \frac{di_{вх}}{dt} + i_{вх} = kU_{вх}, \quad T = RC; \quad k = C.$$

Охват аperiodического звена обратными связями

1. Охват ООС.

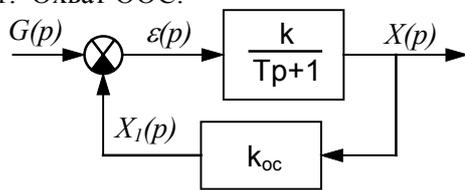


рис. 49

Запишем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(p) &= G(p) - X_1(p), \\ X(p) &= \varepsilon(p) \frac{k}{Tp + 1}, \\ X_1(p) &= X(p) k_{oc}. \end{aligned} \right\} (1)$$

Решаем (1) совместно относительно $G(p)$ и $X(p)$, получим

$$W(p) = \frac{X(p)}{G(p)} = \frac{k}{Tp + (1 + kk_{oc})} \stackrel{\cdot (1+kk_{oc})}{=} \frac{k}{1 + kk_{oc}} \stackrel{\cdot T}{=} \frac{k}{1 + kk_{oc}} \frac{T}{p + 1}$$

или обозначив

$$k_1 = \frac{k}{1 + kk_{oc}}, \quad T_1 = \frac{T}{1 + kk_{oc}}, \quad \text{получим } W(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}.$$

Таким образом при охвате апериодического звена ООС, получим также апериодическое звено, однако, уменьшается коэффициент усиления (передачи) этого звена в установившемся режиме, и увеличивается быстродействие звена, т.к. уменьшается его постоянная времени.

2. Охват ПОС.

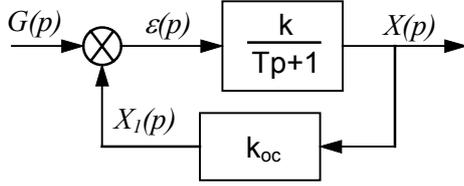


рис. 50

Продельвая аналогичные выкладки, получим:

$$W(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1},$$

где $k_1 = \frac{k}{1 - kk_{oc}}$ и $T_1 = \frac{T}{1 - kk_{oc}}$.

2.1. Если $kk_{oc} > 1$, то характеристическое уравнение $T_1 \lambda + 1 = 0$, $\frac{T}{1 - kk_{oc}} \lambda + 1 = 0$, где $\lambda = -\frac{1 - kk_{oc}}{T}$, имеет положительный вещественный корень, следовательно имеем расходящийся (неустойчивый) процесс.

2.2. Если $kk_{oc} < 1$, то корень характеристического уравнения отрицателен, следовательно полученное апериодическое звено остается устойчивым. При этом возрастает как коэффициент усиления (передачи) звена, так и его постоянная времени, т.е. быстродействие звена уменьшается.

Структурные преобразования

В результате разбиения САУ на типовые звенья направленного действия и получения их передаточных функций, составляется структурная схема всей системы.

Структурная схема – это диаграмма прохождения сигналов управления и их преобразования в САУ.

Структурная схема – это математическая модель системы.

Структурные схемы для реальных САУ имеют сложный и запутанный вид. С целью упрощения структурной схемы или приведения ее к более удобному виду, можно производить структурные преобразования по определенным правилам:

Правила преобразования структурных схем

1. Преобразование последовательного соединенных звеньев.

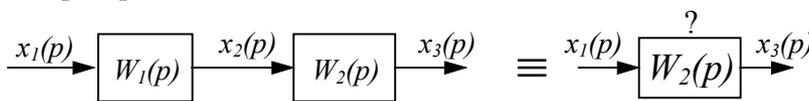


рис. 51

$$\left. \begin{aligned} x_2(p) &= x_1(p)W_1(p), \\ x_3(p) &= x_2(p)W_2(p). \end{aligned} \right\} (1)$$

Решая (1) совместно, получим

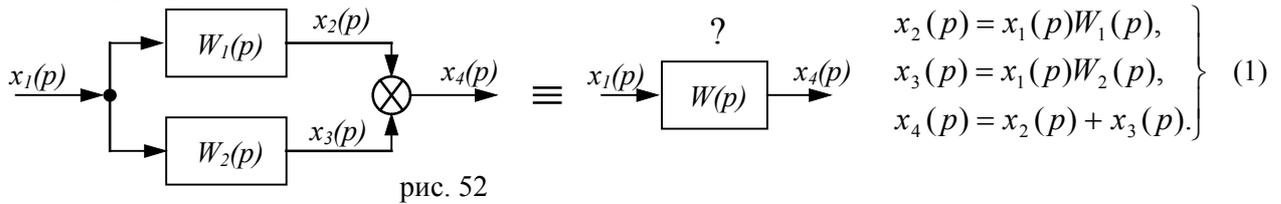
$x_3(p) = x_1(p) \cdot W_1(p)W_2(p)$ или передаточная функция двух последовательно соединенных звеньев

$$W(p) = \frac{x_3(p)}{x_1(p)} = W_1(p)W_2(p). \quad (2)$$

Итак, при n последовательно соединенных звеньев с передаточными функциями $W_i(p)$ ($i = \overline{1, n}$), результирующая передаточная функция равна произведению передаточных функций отдельных

звеньев: $W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p)$

2. Преобразование параллельного соединенных звеньев.



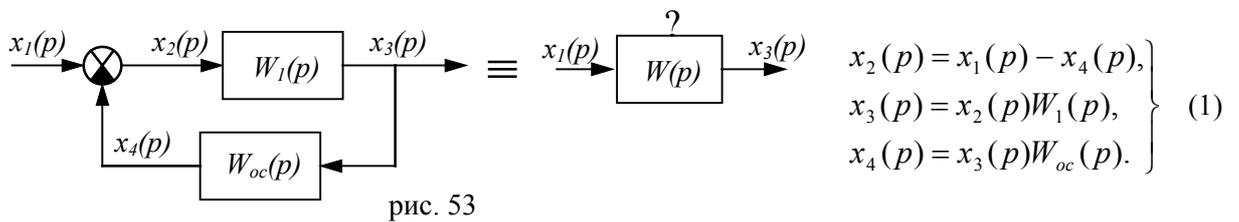
Решая (1) совместно, получим $x_4(p) = x_1(p)W_1(p) + x_1(p)W_2(p) = x_1(p)(W_1(p) + W_2(p))$

или
$$W(p) = \frac{x_4(p)}{x_1(p)} = W_1(p) + W_2(p).$$

Таким образом, передаточная функция n параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев:
$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p).$$

3. Звено, охваченное обратной связью:

3.1. ООС.



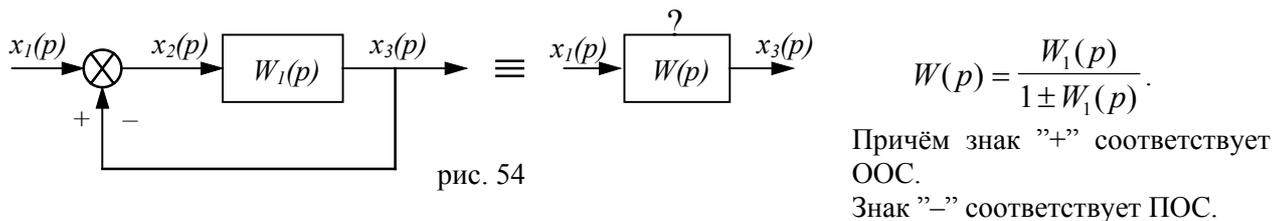
Решая (1) относительно $x_3(p)$ и $x_1(p)$, получим:

$$W(p) = \frac{x_3(p)}{x_1(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_{oc}(p)};$$

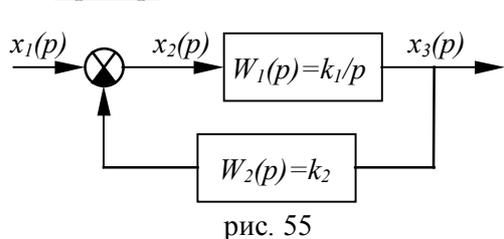
3.2. ПОС. Проводя аналогичные рассуждения, получим:

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_{oc}(p)};$$

3.3. Частный случай: при единичной ОС.



Пример:



$$\begin{aligned} W_3(p) &= \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{\frac{k_1}{p}}{1 + \frac{k_1 k_2}{p}} = \\ &= \frac{k_1}{p + k_1 k_2} = \frac{1}{\frac{1}{k_2} p + 1}, \end{aligned}$$

обозначив $k = \frac{1}{k_2}$ и $T = \frac{1}{k_1 k_2}$, получим
$$W_3(p) = \frac{k}{Tp + 1};$$

Таким образом, интегрирующее звено, охваченное безынерционной обратной связью, эквивалентно типовому аperiodическому звену, т.е. уже не является интегрирующим.

Правила переноса сигнала

В общем случае структурные схемы могут иметь различного рода перекрещивающиеся связи, поэтому для приведения структуры к одноконтурной – удобной для исследования, разработаны правила переноса сигналов из одной точки структуры в другую:

1. При прямом переносе сигнала через ПФ $W_1(p)$:

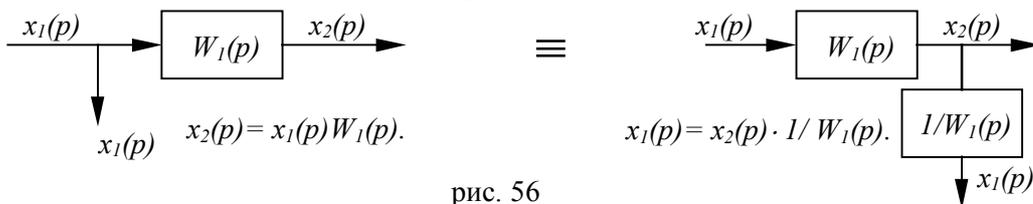


рис. 56

2. При обратном переносе сигнала через ПФ $W_1(p)$:

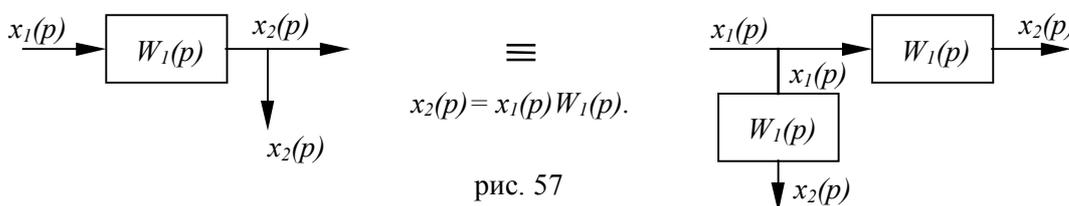


рис. 57

3. При прямом переносе суммирующего звена:

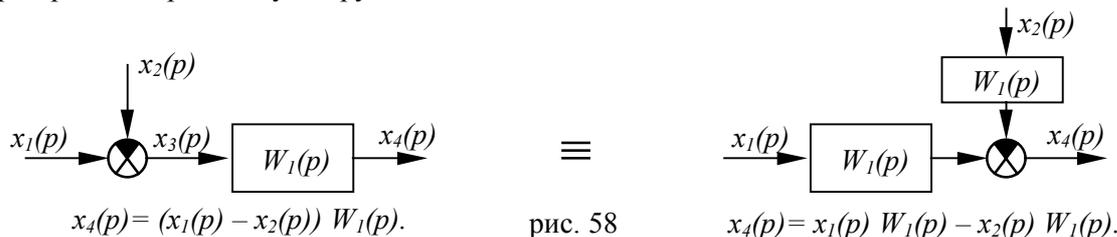


рис. 58

4. При обратном переносе суммирующего звена:

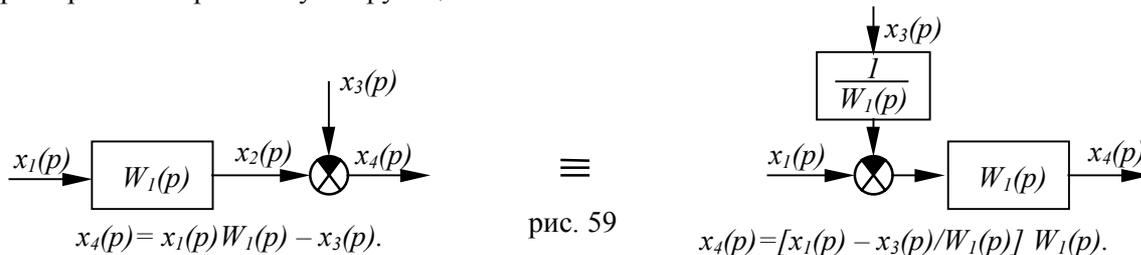


рис. 59

5.

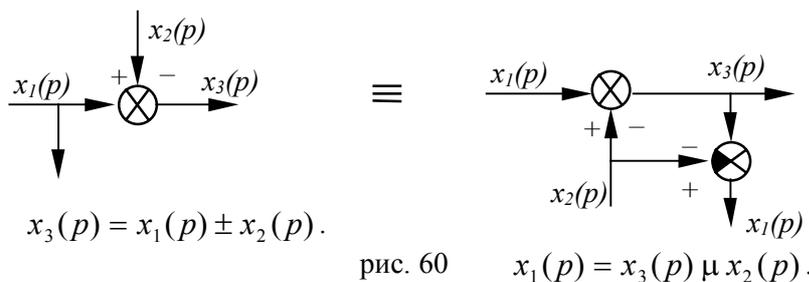


рис. 60

6.

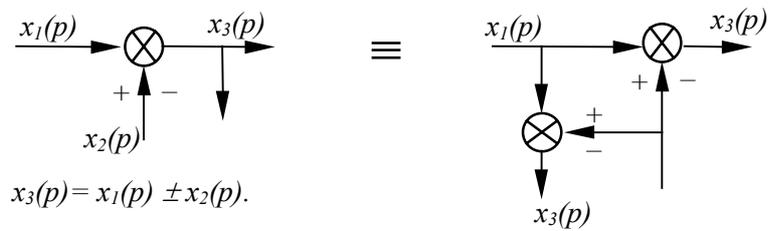


рис. 61

- Замечание:**
- 1) Структурные преобразования можно производить только в том случае, если анализ динамической системы производится при нулевых начальных условиях. В противном случае структурные преобразования приводят к потере начальных условий и погрешностям при дальнейшем анализе.
 - 2) Структурные преобразования лишены физического смысла.

Передаточные функции систем по управляющему и возмущающему воздействиям

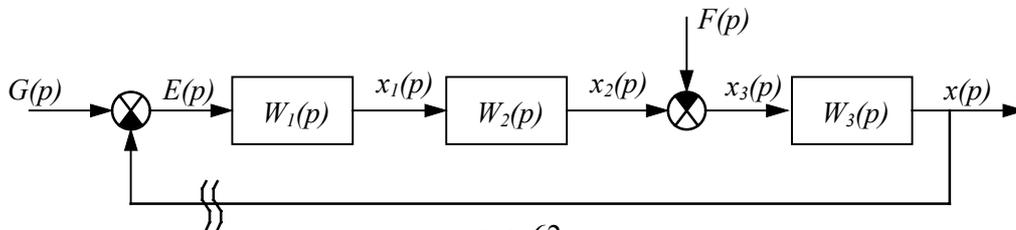


рис. 62

$E(p)$ – изображение ошибки системы;
 $G(p)$ – управляющий сигнал;
 $F(p)$ – возмущение.

Запишем уравнения по структуре (рис.62)

$$\left. \begin{aligned} E(p) &= G(p) - x(p), \\ x_1(p) &= E(p) \cdot W_1(p), \\ x_2(p) &= x_1(p) \cdot W_2(p), \\ x_3(p) &= x_2(p) - F(p), \\ x(p) &= x_3(p) \cdot W_3(p). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Решая систему (1) относительно $x(p)$, $G(p)$ и $F(p)$, получим

$$x(p) = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)} G(p) - \frac{W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)} F(p). \quad (2)$$

Обозначим

$$W_y(p) = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)} \quad \text{– передаточная функция по управлению.}$$

$$W_F(p) = \frac{W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)} \quad \text{– передаточная функция по возмущающему воздействию.}$$

$W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) = W_p(p)$ – есть передаточная функция разомкнутой системы. Чтобы получить её необходимо мысленно разорвать контур обратной связи (волнистые линии на рис.62) и место разрыва считать одновременно входом и выходом системы.

$$x(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} G(p) - \frac{W_3(p)}{1 + W_p(p)} F(p).$$

При совместном действии на систему $G(p)$ и $F(p)$ исследование ведется отдельно по каждому воздействию. Суммарный результат получается алгебраическим сложением всех результатов. Это справедливо лишь для линейных систем.

При исследовании систем стабилизации в качестве исходной служит передаточная функция $W_F(p)$ по возмущению, тогда структура преобразуется к виду (рис.63).

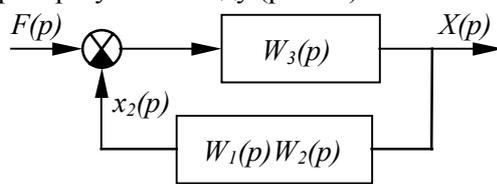


рис. 63

Если анализируется следящая система, то за исходную принимается ПФ $W_y(p)$ по управлению при $F(p) = 0$ (рис.64).

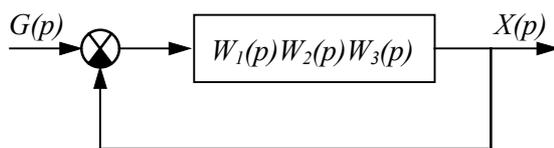


рис. 64

Для того, чтобы получить характеристическое уравнение системы достаточно приравнять нулю знаменатель ПФ замкнутой системы.

Проблема устойчивости в САУ

Устойчивость – это свойство системы возвращаться в исходный или близкий к нему установившийся режим после всякого выхода из него в результате какого-либо воздействия.

Пример:

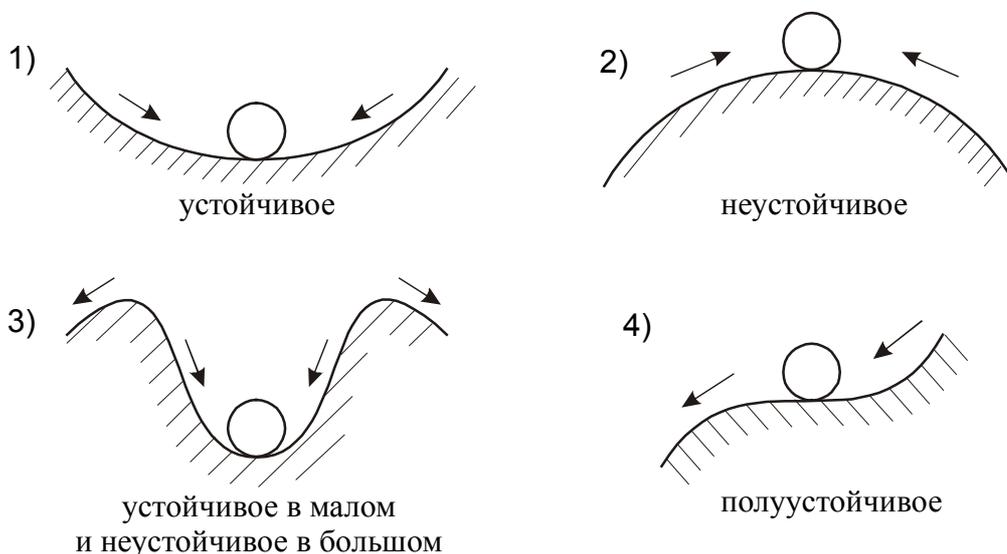


Рис.65

Устойчивость является важнейшим качественным свойством систем управления. Любая САУ создается таким образом, чтобы её основной режим работы был устойчивым.

Рассмотрим линейную САУ, которая описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m. \quad (1)$$

Основным режимом её работы является статический режим или состояние равновесия, когда

$$\dot{x} = 0. \quad (2)$$

Решая (1) с учетом (2)

$$Ax_0 + Bu = 0 \rightarrow Ax_0 = -Bu, \quad (3)$$

получим

$$x_0 = -A^{-1}Bu. \quad (4)$$

Решение (4) существует и является единственным, если матрица A невырождена, т.е. $\det A \neq 0$.

Если $u = const$, то $x_0 = const$ (рис.66).

Если возмущающее воздействие F вывело систему из состояния равновесия, а по окончании его действия система возвращается в это состояние, то такая система устойчива (рис.66).

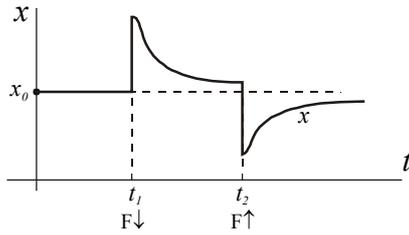


Рис.66

t_1, t_2 — моменты действия возмущений.

Рассмотрим отклонение системы от состояния равновесия

$$\Delta x = x - x_0, \quad (5)$$

где x — текущие координаты вектора состояния,
 x_0 — вектор состояния установившегося режима.

Определение: Линейная система устойчива, если $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x(t) = 0$. (6)

Рассмотрим как изменяется Δx во времени.

$$\dot{\Delta x} = A\Delta x - Bu + Bu, \text{ но т.к. } Bu = 0, \text{ то } \dot{\Delta x} = A\Delta x. \quad (7)$$

Подставим (5) и (7) в (1).

$$\dot{\Delta x} = A(\Delta x + x_0) + Bu = A\Delta x + Ax_0 + Bu$$

или учтя (3), получим

$$\dot{\Delta x} = A\Delta x - Bu + Bu = A\Delta x. \quad (8)$$

Как видно из (8) поведение Δx во времени определено матрицей объекта A . Следовательно эту матрицу необходимо изучать для установления факта устойчивости. При этом можно не переходить к отклонениям от равновесного состояния, а рассматривать однородную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax \quad (9)$$

Основное условие устойчивости

Итак, уравнения, определяющие устойчивость системы имеют вид

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n, \quad \dim A = n \times n. \quad (1)$$

Если известно начальное состояние системы при $t=0$, $x(0)$, то решение (1), как мы уже видели, будет

$$x(t) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i(0))e^{\lambda_i t} e_i, \quad (2)$$

e_i — собственные вектора динамической системы,

λ_i — собственные значения матрицы A или корни характеристического уравнения

$$\det[\lambda I - A] = 0. \quad (3)$$

Если имеем скалярную систему, то характеристическое уравнение имеет вид

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (4)$$

а решение (1), тогда

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}, \quad (5)$$

где $c_i, i = \overline{1, n}$ — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями.

Встает вопрос: каким требованиям должны удовлетворять корни $\lambda_i, i = \overline{1, n}$, для того, чтобы выполнялось условие устойчивости. Из (2) и (5) видно, что для $x(t) \rightarrow 0$, при $t \rightarrow \infty$, необходимо, чтобы каждое слагаемое $e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$.

Это возможно, как мы уже отмечали, когда $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = \overline{1, n}$.

Теорема об устойчивости. Для устойчивости линейной динамической системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части (были левыми).

Докажем условие необходимости:

Имеем характеристическое уравнение (4), тогда, если известны корни характеристического уравнения, полином можно представить в таком виде (теорема Виета):

$$D(\lambda) = a_n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n). \quad (6)$$

Не лишая общности рассуждения, полагаем $a_n = 1$, тогда возможно:

1. Если все корни вещественны и отрицательны, т.е.

$$\lambda_i = -\alpha_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$D(\lambda) = (\lambda + \alpha_1)(\lambda + \alpha_2) \dots (\lambda + \alpha_n). \quad (8)$$

Перемножая скобки в (8), получим полином n -й степени, в котором все коэффициенты положительны.

2. Если все корни комплексные, но с отрицательной вещественной частью, т.е.

$$\lambda_i = -\alpha_i \pm j\omega_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Снова подставим (9) в (6), допустим для двух комплексно-сопряжённых корней, тогда получим $\lambda = -\alpha \pm j\omega$

$$D(\lambda) = (\lambda + \alpha - j\omega)(\lambda + \alpha + j\omega) = (\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \omega^2). \quad (10)$$

Из (10) видно, что также получается многочлен с положительными коэффициентами.

Из рассмотренного вытекает необходимое условие устойчивости:

Для устойчивости линейной динамической системы необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительными, т.е. $a_i > 0, i = \overline{1, n}$.

Заметим, что в данном определении отсутствует слово "достаточно".

Однако, данное условие является намного эффективнее основного условия устойчивости, т.к. не требует вычисления корней.

То есть по виду характеристического уравнения системы можно сделать какое-то заключение об устойчивости. Если хотя бы один из коэффициентов характеристического уравнения отрицателен, то сразу можно сказать, что система неустойчива.

Однако, если все коэффициенты характеристического уравнения положительны, то в общем случае нельзя уверенно утверждать, что система устойчива.

Для суждения об устойчивости САУ практически нет необходимости находить корни характеристического уравнения, т.к. хорошо разработаны косвенные методы, по которым можно судить о знаках вещественных частей этих корней и тем самым об устойчивости системы, не решая самого характеристического уравнения. Эти косвенные методы называются критериями устойчивости.

Критерии устойчивости линейных САУ

1. Алгебраические.
2. Частотные.

1. Алгебраический критерий Гурвица (1895 г., Швейцария).

Наиболее распространен в технической практике алгебраический критерий Гурвица в форме определителей.

Пусть имеется характеристическое уравнение системы:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (1)$$

Составляется определитель Гурвица по следующему алгоритму:

1. Главная диагональ, начиная с коэффициента a_{n-1} , a_{n-2} и т.д. до a_0 .
2. Коэффициенты над главной диагональю – с уменьшающимися индексами.
3. Коэффициенты под главной диагональю – с увеличивающимися индексами.

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \Lambda & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & a_0 \end{vmatrix} \text{ – определитель Гурвица}$$

Определение критерия: Для устойчивой системы необходимо и достаточно, чтобы все диагональные миноры определителя Гурвица и сам определитель были положительны

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{n-1} > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3} > 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_n &> 0. \end{aligned}$$

Для определения критического значения какого-либо параметра САУ достаточно приравнять нулю Δ_{n-1} .

Следствие алгебраических критериев: Для уравнения 2-го порядка, положительность коэффициентов является необходимым и достаточным условием устойчивости.

Область применения алгебраических критериев ограничивается, как правило, системами не выше 5-го порядка, т.к. условия устойчивости усложняются с ростом порядка системы. Кроме того, алгебраические критерии применяются лишь для анализа системы на устойчивость при известных всех её параметрах. Отметим, что алгебраические критерии не применимы для систем с чистым запаздыванием.

Частотные критерии устойчивости

Существует три частотных критерия:

1. Критерий Михайлова (1938 г.)
2. Критерий Найквиста (1932 г.)
3. Д-разбиение Ю.И.Неймарка (1948 г.)

1. Критерий Михайлова.

Имеется характеристическое уравнение системы n -го порядка

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + K + a_1 p + a_0 = 0. \quad (1)$$

Левую часть (1) приравниваем $M(p)$

$$M(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + K + a_1 p + a_0. \quad (2)$$

Допустим, что корни уравнения (1) известны и равны p_1, p_2, \dots, p_n . Тогда по теореме Виета уравнение (2) можно представить в виде произведения сомножителей

$$M(p) = a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n). \quad (3)$$

На комплексной плоскости корню каждому p_i корню соответствует вполне определенная точка (рис.67).

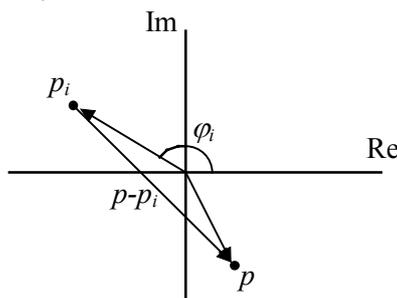


Рис.67

Геометрически, каждый корень p_i изображается вектором из начала координат, равный модулю комплексного числа, а угол между вектором и положительным направлением действительной оси – фазе комплексного числа.

Величины $(p - p_i)$, входящие множителями в (3) геометрически представляют собой векторы проведенные из точки p_i к p .

Заменяя в (3) p на $j\omega$, получим

$$M(j\omega) = a_n(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n), \quad (4)$$

концы элементарных векторов $(j\omega - p_i)$, $i = \overline{1, n}$ будут находиться на мнимой оси в точке $j\omega$ (рис.68).

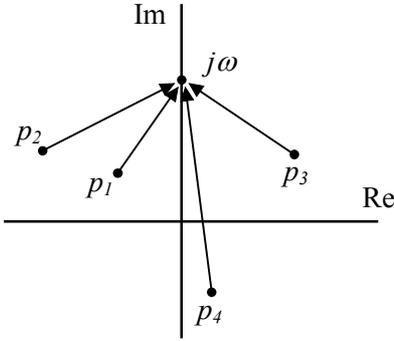


Рис.68

$M(j\omega)$ представляет собой вектор, равный произведению векторов $(j\omega - p_i)$ и действительного числа a_n . Модуль $|M(j\omega)|$ равен:

$$|M(j\omega)| = a_n \prod_{i=1}^n |j\omega - p_i|. \quad (5)$$

Фаза вектора $M(j\omega)$ равна сумме фаз элементарных векторов $(j\omega - p_i) \rightarrow \varphi_i$

$$\varphi_M = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (6)$$

Условимся считать вращение векторов против часовой стрелки положительным. Тогда при увеличении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ каждый элементарный вектор $(j\omega - p_i)$ повернется на угол равный $+\pi$, если корень p_i левый. Если корень p_i правый, то на угол $-\pi$.

Предположим, что уравнение (1) имеет k правых корней. Тогда при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ суммарный угол поворота определяется

$$\varphi_M = \pi(n - k) - \pi k = \pi(n - 2k). \quad (7)$$

Как известно из основной теоремы устойчивости, для устойчивой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения были левыми. Следовательно при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$, как это следует из (7), необходимо и достаточно, чтобы вектор $M(j\omega)$ повернулся на угол $\varphi_M = \pi n$.

При возрастании ω от $-\infty$ до $+\infty$ вектор $M(j\omega)$ на комплексной плоскости M описывает кривую, которая называется годографом Михайлова.

Уравнение годографа находится подстановкой $p = j\omega$ в (2)

$$M(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + a_{n-2}(j\omega)^{n-2} + \dots + a_1 j\omega + a_0 \quad (8)$$

или

$$M(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \text{ — алгебраическая форма комплексного числа,} \quad (9)$$

где $U(-\omega) = U(+\omega)$ — четная функция ω (действительная часть),

$V(-\omega) = -V(\omega)$ — нечетная функция ω (мнимая часть).

Если положить в (9) вместо ω $-\omega$, то получим

$$M(-j\omega) = U(+\omega) - jV(\omega) \quad (10)$$

Из последнего выражения заключаем, что годограф Михайлова симметричен относительно действительной оси при $\omega > 0$ и $\omega < 0$.

Поэтому при построении годографа достаточно изменять ω от 0 до $+\infty$. При этом результирующий угол поворота годографа $M(j\omega)$ уменьшится вдвое, т.е. $\varphi_M = n \frac{\pi}{2}$.

Критерий Михайлова: Для того, чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты от 0 до $+\infty$ годограф Михайлова прошёл столько квадрантов, каков порядок характеристического уравнения, причем начинался бы с положительной действительной оси и не нарушал порядок пересечений вещественной и мнимой осей комплексной плоскости M .

Пример: 1. Для устойчивых систем. 2. Для неустойчивых систем.

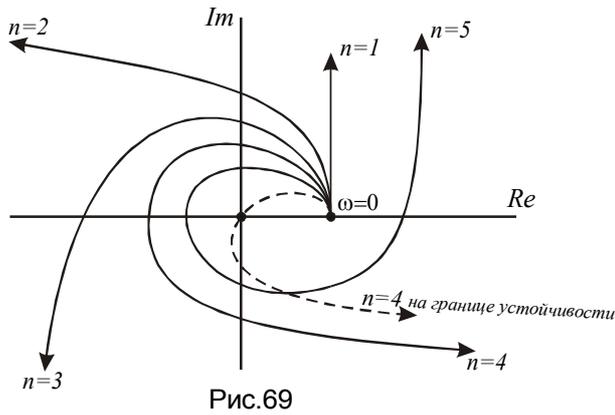


Рис.69

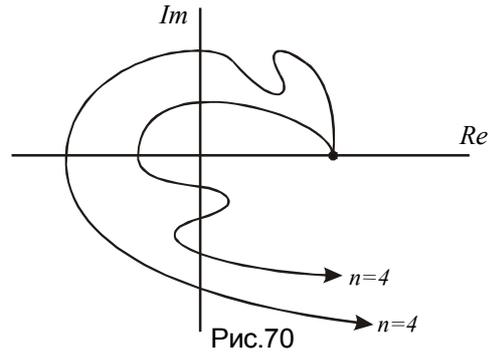


Рис.70

2. Критерий Найквиста.

Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы. Это один из самых рабочих (инженерных) критериев. Когда, однако, рассматривается многоконтурная система, критерий Найквиста преимуществ не имеет и лучше пользоваться критерием Михайлова.

Имеем замкнутую САУ (рис.71)

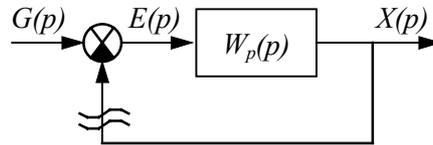


рис. 71

Мысленно размыкаем систему в контуре ОС и место разрыва считаем одновременно входом и выходом системы, одновременно переходя в частотную область, т.е. $p \rightarrow j\omega$.

$$W_p(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} \quad (1)$$

где $P(j\omega)$ и $Q(j\omega)$ – полиномы числителя и знаменателя разомкнутой системы $W_p(j\omega)$.

Докажем этот критерий:

$$W_s(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)}. \quad (2)$$

Рассмотрим знаменатель выражения (2).

$$1 + W_p(j\omega) = 1 + \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{P(j\omega) + Q(j\omega)}{Q(j\omega)}. \quad (3)$$

В уравнении (3) знаменатель представляет собой годограф разомкнутой системы, а числитель годограф замкнутой системы, т.к.

$$W_s(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{P(j\omega) + Q(j\omega)}.$$

1. Предположим, что разомкнутая система устойчива. Большинство реальных разомкнутых систем, состоящих из устойчивых звеньев и не имеющих местных ОС – устойчивы. Если разомкнутая система устойчива, то фаза $Q(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ будет равна

$$\varphi_Q = n \frac{\pi}{2}, \quad \text{где } n \text{ – порядок характеристического уравнения } Q(p) = 0.$$

Порядок характеристического уравнения также n , т.к. степень $P(p)$ не больше степени $Q(p)$.

Изменение фазы числителя (3) при изменении ω от 0 до $+\infty$, т.е. фазы годографа замкнутой системы, в общем случае, равно:

$$\varphi_{P+Q} = \frac{\pi}{2}(n - 2k), \quad (4)$$

где k – число правых корней характеристического уравнения замкнутой системы.

Тогда изменение фазы вектора $(1 + W_p)$ при возрастании ω от 0 до $+\infty$ равно разности изменения фаз $(P + Q)$ и Q .

$$\varphi_{(1+W_p)} = \varphi_{(P+Q)} - \varphi_Q = \frac{\pi}{2}(n - 2k) - \frac{\pi}{2}n = -\pi k. \quad (5)$$

По основной теореме устойчивости система будет устойчива, если $k = 0$, тогда

$$\varphi_{(1+W_p)} = 0. \quad (6)$$

Изобразим на комплексной плоскости годограф $1 + W_p(j\omega)$.

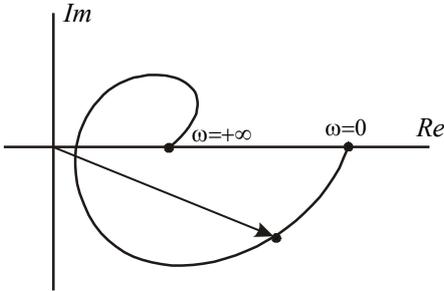


Рис.72

$\varphi_{(1+W_p)} = 0$ – тогда и только тогда, когда этот годограф не охватывает начало координат (рис.72).

Переходим к амплитудно-фазовой характеристике $W_p(j\omega)$, которая отличается от $1 + W_p(j\omega)$ переносом начала координат на 1 вправо, а критической точкой комплексной плоскости является $-1, j0$ (рис.73).

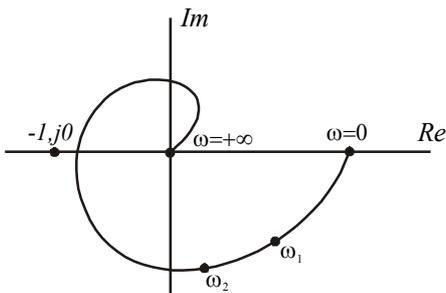
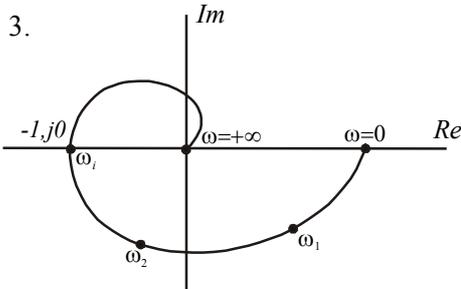
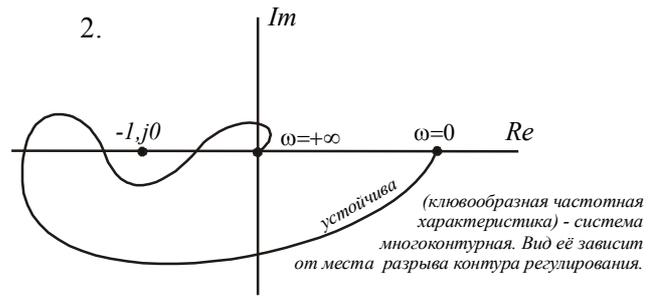
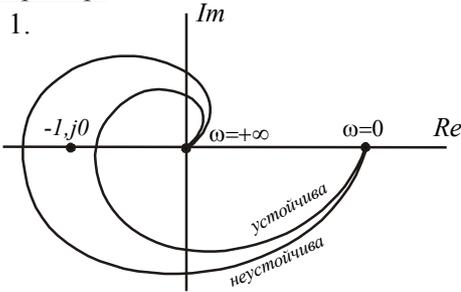


Рис.73

1-е определение критерия Найквиста: Если система в разомкнутом состоянии устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы при изменении ω от 0 до ∞ не охватывала точку комплексной плоскости $W_p(j\omega)$ с координатами $-1, j0$.

Пример:



← система находится на границе устойчивости.

ω_i – частота незатухающих колебаний.

Физика: если на вход разомкнутой системы подать гармонический сигнал частоты ω_i , то амплитуда и частота выходного сигнала будут равны амплитуде и частоте входа, а сдвиг фаз составит 180° .

Рис.74

2-е определение критерия Найквиста: Если система в разомкнутом состоянии **неустойчива** и её характеристическое уравнение имеет l правых корней, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы частотная характеристика разомкнутой системы при изменении ω от 0 до ∞ охватывала точку комплексной плоскости $W_p(j\omega)$ с координатами $-1, j0$ $\frac{l}{2}$ раз.

Пример:

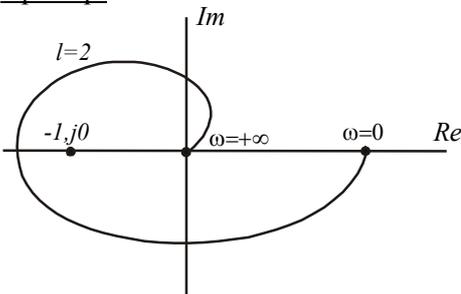


Рис.75

Угол поворота вектора $W_p(j\omega)$ должен быть равен $-l \cdot \pi$ (доказательство самостоятельно).

Понятие запаса устойчивости по фазе и по модулю

Т.к. параметры системы определяются приближенно и в процессе работы не остаются постоянными, то весьма важное значение имеет оценка удаления частотной характеристики от точки $-1, j0$. Это удаление характеризует запас устойчивости по фазе и запас устойчивости по модулю (усилению).

За критическую фазу принимается $\varphi = -180^\circ$ и модуль $|M| = 1$.

Для определения этих запасов на частотной характеристике разомкнутой системы проводится окружность радиусом 1 с центром в начале координат (рис.76). Тогда:

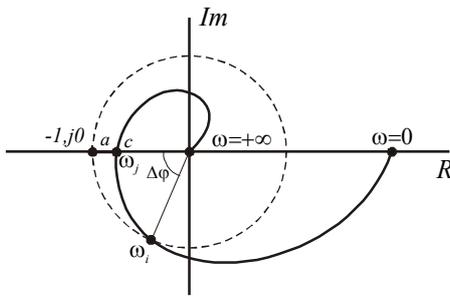


Рис.76

1. Запас по фазе $\Delta\varphi = \pi - |\varphi(\omega_i)|$ для частоты ω_i , при которой $|W_p(j\omega_i)| = 1$.
2. Запас по модулю определяется величиной модуля a для частоты ω_j , при которой $\varphi(\omega_j) = -\pi$, это отрезок от $-1, j0$ до точки c .

Практически, обычно, считают для качественных систем $a = 30 \div 35\%$, $\Delta\varphi = 40^\circ \div 60^\circ$.

Запасы устойчивости системы достигаются включением дополнительных звеньев или изменением параметров старых звеньев. Дополнительные звенья (корректирующие) выполняют роль фильтров определенного диапазона частот, что соответствующим образом деформирует частотную характеристику, обеспечивая требуемые запасы по фазе и модулю (рис.77).

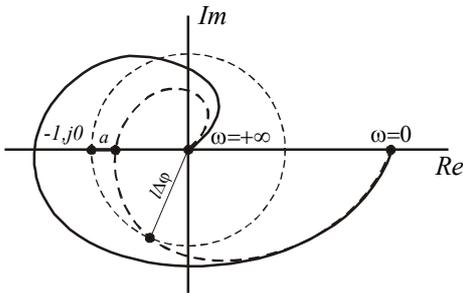


Рис.77

Физический смысл запаса устойчивости по фазе и по модулю

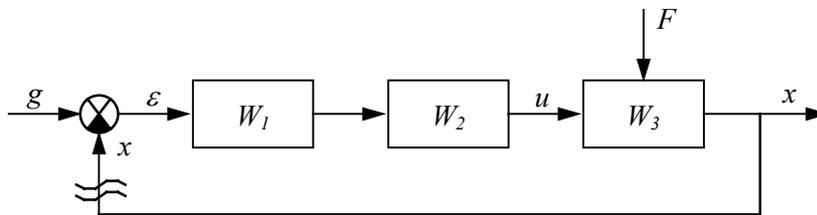


рис. 78

Подавая на вход системы гармонический сигнал и увеличивая частоту, на выходе получим сигнал с изменяющейся амплитудой и возрастающей фазой.

Т.к. рассматривается ГОС, то фаза ОС равна $-\pi$, т.е. если бы $W_1W_2W_3 = k$ (безынерционны) то на суммирующем устройстве фаза входного и выходного сигналов отличается на угол -180° (рис.78).

Допустим при $W_p = W_1W_2W_3$ (инерционной) получили отставание по фазе выходного сигнала на определенной частоте -200° , тогда обратная связь из отрицательной превратилась в положительную.

При положительной ГОС и $|M| > 1$ в системе происходит генерирование колебаний и она становится неустойчивой.

$$F \downarrow \rightarrow x \uparrow \rightarrow \varepsilon = g - (-x) \uparrow \rightarrow u \uparrow \rightarrow x \uparrow \uparrow \text{ и т.д.}$$

Если при ПОС $|M| < 1$, то всякие возмущения будут затухать в самом контуре регулирования системы, и она будет устойчива.